KAS YRA MATEMATIKA?*

Rimas Norvaiša

Klausimą „kas yra matematika?" formuluojame kaip kvietimą rimtai atsižvelgti į reiškinį vadinamą matematika. Vietoje žodžio „reiškinys" galima būtų vartoti ir labiau įprastus apibūdinimus, pavyzdžiui, mokslas ar žinių sistema. Bet tai reikštų a priori priskirti matematikai gal būt visai nebūdingus bruožus[1].

Kadangi tema be galo plati šiame pasisakyme išskirsime tik vieną jos aspektą. Tuose mokslo filosofijai skirtuose veikaluose, kuriuos mums teko vartyti matematikai nelieka vietos arba apie ją užsimenama tik epizodiškai[2]. Jei ne matematikos ignoravimas, tai matematikos tapatinimas su mokslo kalba ar logika atrodo gana plačiai paplitęs. Kad ir koks patogus ir naudingas mokslui būtų šis požiūris, mūsų nuomone tam nėra pakankamo pagrindo.

Matematikos apibūdinimas Neretai apie matematiką sprendžiama turint tik minimalias žinias apie šį reiškinį. Iš matematikų pusės reikia pripažinti, kad visuomenės informavimas apie matematikoje vykstančius procesus yra taip pat ignoruojamas. Tai nėra lengvas klausimas, nes įprastinis universitetinis matematikos kursas nėra pakankamas tam, kad susidaryti realų vaizdą apie matematiką. Paprastai tokiame kurse neatsiranda vietos net klausimams: kas yra skaičius? Studentai mokomi diferencijuoti ir integruoti taip, kaip mokykloje „kalama" daugybos lentelė. Retas kuris iš jų galėtų paaiškinti diferencijavimo ir integravimo prasmę, o tuo labiau paaiškinti, kas yra tas skaičius. Deja, universitete pagrindinis dėmesys skiriamas tik „profesiniams įgūdžiams" lavinti.

Požiūris į tai, kas yra matematika nuolatos kito. Praeito šimtmečio pradžioje matematika vis dar buvo apibrėžiama išvardijant jos tyrimo objektus: skaičiai, forma, judėjimas, kitimas, erdvė ir panašiai. Vėliau apibrėžiant matematiką, buvo atsižvelgiama į jos tyrimo metodo ypatumus. Atrodo, kad paskutiniais dešimtmečiais labiausiai pripažintu tapo matematikos, kaip mokslo apie tvarką[3] (angl.

*Tekstas pranešimo, skaityto konferencijoje „Mokslo vaizdiniai dabarties filosofijoje", vykusioje Vilniaus universitete 2008 gegužės 9 d.

the science of patterns) apibūdinimas. Šiuo atveju sąvoka „tvarka" suprantama bendriausia prasme, kaip bet kuris protu suvokiamas reguliarumas. Pasaulio suvokimas yra galimas tiek, kiek jame galima įžvelgti kažkokią tvarką. Matematinis tvarkos supratimas yra bendras ir ta prasme, kad jos nedomina tiriamą struktūrą sudarantys objektai. Svarbūs yra tik ryšiai tarp objektų ir tų ryšių reguliarumas. Kiekviena matematikos sritis nagrinėja kurios nors struktūros ryšius tvarkos požiūriu: tvarka tarp skaičių, tvarka tarp formų, judėjimo tvarka, elgesio tvarka ir t.t. Taip matematiką apibūdina *Keith*as *Devlin*as savo knygoje "The Science of Patterns"([8]). Panašus į šį yra matematikos kaip mokslo apie struktūras apibūdinimas.

Minėti ir kiti panašūs matematikos apibūdinimai vieną nežinomą sąvoką aiškina kita neaiškia sąvoka (pvz. minėtoji tvarka ar struktūra). Jie neatskleidžia pagrindinius matematikos bruožus, o tuo labiau jos išskirtinumą lyginant su kitais mokslais. Pavyzdžiui, fizikoje sąvoka „teorija" turi visiškai skirtingą prasmę negu matematikoje. Kaip ir matematikoje, teorija fizikoje yra dedukcinis teiginių išvedimas iš prielaidų. Tačiau fizikoje teorija yra tik hipotezė, kurią siekiama patvirtinti ar paneigti eksperimentu. Tačiau eksperimentas niekaip negali įtakoti teorijos matematikoje, jei ji paremta įrodymu.

Šaltinis ir vystymasis Pradedant rimtą kalbą apie matematiką pirmiausia[4] verta prisiminti, kas yra jos šaltinis, kas verčia matematiką vystytis? Šie klausimai yra panašūs į tradicinį klausimą: matematika atrandama ar išrandama? Matematikos šaltinių yra daug: tai ir praktinė žmogaus veikla; tai ir gamtos bei visuomenės mokslų problemų sprendimas; tai ir žmogaus gebėjimas kaupti informaciją, kurti naujas sąvokas, apibendrinti įvykius ir panašiai. Matematikos vystymosi istorija rodo, kad šių ir kitų šaltinių įtaka kinta. Pavyzdžiui, *I. Newton*o laikų matematika iš esmės sprendė tik gamtos mokslų problemas. Tuo tarpu pastaruosius keletą šimtmečių naujų idėjų šaltiniais tampa pačios matematikos problemos ir rezultatai. Tam pakanka prisiminti neseną *Fermat* problemos sprendimo istoriją ir kontekstą, ar *Riemann*o hipotezės vaidmenį visai matematikai.

Neretai tenka išgirsti nuomonę, kad matematika šiais laikais išsisėmė, nes beveik visos jos problemos išspręstos. Šio fakto patvirtinimui nurodomi darbai už kuriuos matematikams suteikiamos premijos. Teigiama, kad tie darbai yra tik senų problemų sprendimai. Vėlgi, diskusija būtų sunki, nes remtis reikėtų tomis žiniomis, kurios prieinamos tik tiems, kas jomis domisi. Nesiveliant į ilgas kalbas, paprasčiausia čia būtų pacituoti kitokią nuomonę: „nepagrįsta tikėtis, kad bet kuris samprotavimas, paprastai vadinamas griežta (rigorous) matematika, gali išspręsti bent kiek daugiau nei labai mažą visų matematikos klausimų dalį" ([3, p. 2408]). Šią nuomonę ginantis autorius *Paul*as J. *Cohen*as galvoje turi aksiomatinį dedukcinį metodą, grindžiamą aibių teorijos *Zermelo–Fraenkel*io aksiomų sistema. Jei jis teisus, tai matematikų laukia didžiuliai darbai.

Kalbant apie vidinius matematikos vystymosi šaltinius, paprasčiausias smalsumas susipažinus su garsiomis ar mažiau žinomomis problemomis yra matematikos vystymosi motyvas. Dalies matematikų veiklos bruožu yra siekis suprasti tiriamąjį reiškinį; kodėl paprastai formuluojama problema dažniausiai reikalauja nepaprastai sudėtingų priemonių jai išspręsti ir kas už viso to slypi. Matyt supratimo siekimas yra svarbiausiu matematikos vystymosi šaltiniu. Gamtos ar visuomenės mokslų atstovas pasakytu, kad lygiai tas pats motyvas įtakoja ir jų veiklą. Bet matematikos atveju ne visai aiškus yra jos tyrimo objektas.

Tyrimo objektas Tai, kad gamtos mokslų empirinis charakteris yra svetimas matematikai tarp kita ko parodė *Gottlab*as *Frege* ([5]) dar 1884 m. (jo darbo tikslu buvo *Immanuel*io *Kant*o pasiūlytos intuicijos vaidmens matematikoje klausimas). *Frege* samprotavimai rodo, kad skaičius yra kažkas, kas susiję su sąvoka; jis teigė, kad skaičius yra tam tikros sąvokos ekstensija. Vėliau sąvokos ekstensiją pakeitė aksiomų pagalba apibrėžiama aibė - matematikos objektų konstravimo priemonė. Kaip ir visos abstrakcijos, matematikos objektai nepriklauso nuo erdvės ir laiko, nesiejami priežastiniais ryšiais ir panašiai. Deja, nėra tikslesnio matematikos objekto apibūdinimo, kaip pati matematikos teorija, kurioje tas objektas įgyja prasmę.

Kokios teorijos sudaro matematiką? Kokia yra matematikos organizacinė forma? Tradiciškai matematika dalinama į keturias dalis: analizė, geometrija, algebra ir taikomoji matematika. Toks skirstymas patogus pradinėms matematikos studijoms, kurį netrukus tenka smulkinti. Pavyzdžiui, geometrija siedamasi su analize sudaro diferencialinę geometriją; algebra jungiasi su geometrija; kuriasi naujos sritys - topologija, grupių teorija, tikimybių teorija ir t.t. Šios sritys gimsta ir vystosi tiriant minėtas skaičiaus, erdvės, laiko ir judėjimo sąvokas. Šiuo metu yra suskaičiuojama apie 3000 pripažintų matematikos mokslinio tyrimo sričių ([6, 8 pusl.]).

Stebėtina yra tai, kad nepaisant tokios sričių gausos ir margumo, matematikai yra būdinga stebėtina harmonija. Ją iliustruoja tai, kad atrodytų pačios tolimiausios sritys kartais ir netikėtai susijungia. Pasirodo, kad nepriklausomai besivystančios šakos turi kažką bendro, atrandamo visiškai to nesitikint ir atsitiktinai.

Formalus charakteris Labiausiai matomas matematikos bruožas yra jos formalus charakteris. Kiekvienas teiginys yra teisingas tik tada, kai jis įrodomas. Deja, neretai įrodymo vaidmuo suabsoliutinamas teigiant, kad matematika yra paprasčiausias žaidimas pagal nustatytas taisykles. Taip, įrodymas yra svarbus tuo, kad patvirtina teiginio teisingumą, bet, kas dar svarbiau, įgalina suprasti, kodėl teiginys yra teisingas. Įrodymu realizuojamas dalis siekimo suprasti matematinį reiškinį. Šią dalį galima vadinti anksčiau minėtu matematiniu *išradimu*. Kita, dar svarbesnė supratimo dalis yra teiginio-hipotezės *atradimas*. Būtų naivu manyti, kad matematikai tiesiog perrenka visus galimus reiškinių variantus. Šioje matematinio tyrimo dalyje glūdi matyt didžiausia mistika, kurią aiškinant apeliuojama į intuiciją, patirtį ir daugelį kitų reiškinių.

Kaip beaiškintume matematinio atradimo procesą, aišku viena, kad jis vyksta matematiko galvoje. Jei taip, tai kodėl matematinė tiesa gimusi galvoje derinasi su faktu aptinkamu jutiminėje tikrovėje? Jei matematika yra formalus žaidimas, tai kodėl formalios išvados atitinka tikrovės faktus? Kai kurios matematikos tiesos iš tikro gali būti kildinamos iš gyvenimo patirties. Tačiau tam, kad taptų matematine tiesa fakto nepakanka. Tam tikra matematikos tiesų dalis yra kildinama iš aksiomų ir apibrėžimų. Likusi, pagrindinė matematikos teiginių dalis, atsiranda iš jau sukurtų matematikos teorijų siekiant geriau suprasti matematinę realybę, bet ne jutiminę.

Rezultatų vertinimas Tai, kad matematikos tyrimo objektas yra abstrakčios sąvokos, matematiką išskiria iš gamtos, žmogaus ir visuomenės mokslų tarpo. Matematika skiriasi ne tik tyrimo objektais; ji išsiskiria tyrimo metodais, bei tyrimų rezultatų vertinimo kriterijais. Geriausiai žinomas skirtumas - eksperimento ir dedukcinio samprotavimo vaidmenys. Gamtos mokslų indukcija nėra tas pats, kas matematinė indukcija - pagrindinis teiginių apie begalines aibes įrodymo metodas. Estetika ir grožis, kaip matematikos rezultatų vertinimo kriterijai, matyt sunkiai suprantami tiems, kam neteko rinktis tarp galimų matematinės problemos sprendimo variantų(5). Bet tai ir yra grynosios matematikos esmė ir kasdienybė. Ne rezultato „praktinis naudingumas", bet jo elegantiškumas ir įrodymo paprastumas lemia jo vietą matematikos žinių sistemoje. Tokį matematikų požiūrį patvirtina matematikų asmeninės patirties istorinė analizė. Pavyzdžiui, *Poincaré* ([10], 52 pusl.) rašo, kad matematikai vadovaujasi „estetiniu jausmu, pažįstamu visiems tikriems matematikams, ... kadangi naudinga yra ta kombinacija, kuri yra gražiausia."

Du matematikos veidai *Mary Tiles* [12] žodžias tariant, matematika turi du visiškai skirtingus veidus. Pirmasis reiškiasi manipuliavimu skaičiais ir dažniausiai matomas mokantis matematikos bei jos taikymuose. Kitas veidas - beveik laisvos nuo skaičių abstrakčios struktūros - atsiskleidžia grynojoje matematikoje. Šie veidai kažkokiu būdu giliai tarpusavyje susiję: proto pagalba įrodytos teoremos neretai tampa fizinio pasaulio išraiška. Iš prigimties...

Paprasčiausiai problema sprendžiama postuluojant Dievo-matematiko egzistavimą. Dievas sukūrė ne tik jutiminį pasaulį bet ir žmogaus protą, suteikdamas jam galimybę suprasti Kūrėjo darbą. Tokiu būdu paaiškinant neįtikėtiną proto galią pažinti pasaulį mąstymo būdu ir sulyginant skirtingas tikroves. Apie tokį požiūrį liudija grynosios matematikos atstovų pitagoriečių skaičių misticizmas ir Platono idėjų pasaulis, kuriame jutimiška tikrovė tampa paprasčiausiu šešėliu. Toks problemos sprendimas, deja, padaro matematiką priklausoma nuo Dievo hipotezės ir kai tik paskelbiama, kad Dievas mirė, tai su juo miršta ir gebėjimas pažinti jo kūrybą. Tokiu atveju matematika vėl tampa tik skaičių mašina įgijusia kompiuterio formą ar tik vienu iš MTEP-o įrankiu, o protas tampa technologiniu mąstymu.

Kitas dviejų veidų problemos sprendimas yra vieno iš veidų neigimas. Jo esmė yra ta, kad matematika nėra apie ką nors konkrečiai (žr. Dummett [4, 13 pusl.]). Matematika tiesiog neturi savo tyrimo objekto, o yra tik sistemingas sudėtingų dedukcinių argumentų konstravimas ir tyrimas. Dedukcinis samprotavimas įgalina parodyti, kaip iš labai paprastų prielaidų gaunami sunkiai suvokiamos ir dažnai stebėtinos išvados. Matematikos teoremos yra tiesiog kažkas panašaus į programas kompiuteriui, kurias reikalui esant galima naudoti. Tokiu atveju matematika yra tik forma ar kalba, kurią (kažkodėl) naudoja mokslas. Šis problemos sprendimas, įgijęs logicizmo ir formalizmo programų pavidalą, susiformavo 19 amžiaus pabaigoje. Tačiau netrukus pasirodė, jog šios programos iš principo nerealizuojamos.

Jei matematika yra tik objektyvi ir absoliuti kalbai, tai empirinių mokslų faktai išreiškiami tokia kalba išlieka objektyvūs ir laisvi nuo interpretacijų. Logicizmo ir formalizmo programų realizavimas patvirtintų gamtos mokslams patogią aplinkybę, kad matematika yra kalba be turinio. Todėl nenuostabu, kad iki šiol mokslo filosofija (išskyrus kai kuriuos jos atstovus) aplenkia matematiką per atstumą. Iš tikro, jei gamtos mokslo metodai remiasi ne objektyviu racionalumu, tai galbūt jie remiasi kokia nors kita galia. Nepasiteisinus keliems dviejų veidų problemos sprendimams, nereiškia kitokio sprendimo negalimumą. Antra vertus, problemos sprendimas gimsta priklausydamas nuo problemos formulavimo. Šiuo atveju problemos sprendimas priklauso nuo to, kaip suvokiamas daugialypis matematikos veidas.

Matematikos taikomumas Nežinant minėtų aplinkybių, ar jas ignoruojant, mažai suprantama būtų ir matematikos filosofijos problema: kaip paaiškinti matematikos efektyvumą kituose moksluose? Jei matematikos objektai yra abstrakcijos, o gamtos mokslų tyrimo objektai yra realūs reiškiniai, tai kaip galime paaiškinti matematikos naudingumą tiriant fizinį pasaulį? Kokiu būdu tai, kas atsiranda matematiko galvoje pasirodo tinka tam, kas yra toli nuo bet kokios jo patirties? Šį matematikos paradoksalumą aiškiai formulavo *Wigner*is savo garsiajame esė „Nepaaiškinamas matematikos efektyvumas gamtos moksluose" ([13]).

Matematikos taikomumo gamtos moksluose problemą *Steiner*is ([11]) aiškina jau pripažindamas ir atsižvelgdamas į tai, kad šiandienos matematikai naudoja grožio ir patogumo (beauty and convenience) kriterijus. Šią aplinkybę jis vadina antropocentrizmu ir teigia, kad ji yra šiuolaikinės fundamentaliosios fizikos atradimų būtina sąlyga. Tokiu būdu, matematikos dėka mokslinės teorijos apie gamtą tampa „patogios vartojimui" („user friendly"). Tačiau toks matematikos vaidmuo empiriniuose moksluose pakerta tikėjimą tų mokslų objektyvumu ir todėl gali būti nepriimtinas mokslo filosofijai, kas buvo minėta pradžioje.

Matematikos filosofija Šiuolaikinis matematikos taikomumo gamtos moksluose paradokso aiškinimas remiasi prielaida, jog matematikos objektai egzistuoja nepriklausomai nuo žmogaus mąstymo. Kadangi matematikos objektai aiškiai nėra fiziniai, jų objektyvaus egzistavimo prielaida reiškia pripažinimą egzistuojant tokios realybės, kuri skiriasi nuo fizinės ir psichinės. Matematikos filosofijoje ši pozicija vadinama platonizmu arba realizmu. Remiantis platonizmo prielaida nėra problemų aiškinant matematikos efektyvumą gamtos moksluose. Bet sunkumai atsiranda tada, kai bandoma atsakyti į klausimą, o kokiu būdu žmogaus protas sugeba pasiekti tą matematinių objektų pasaulį. Nuoroda į matematinę intuiciją nelabai padeda, nes ji pati yra ne mažiau paslaptingas reiškinys. Nesugebėjimas racionaliai paaiškinti platonizmo poziciją verčia matematikus jos atsisakyti tais atvejais, kai reikalaujama ją paaiškinti(6).

Anti-platonizmo pozicija nėra taip vienareikšmiškai išreikšta ir ją sudaro daugybė skirtingų ir įvairiai grindžiamų požiūrių, pradedant formalizmu ir baigiant nominalizmu matematikos filosofijos kontekste. Pastaruoju metu pasirodė kelios dešimtys knygų skirtų platonizmo ir anti-platonizmo problemai (pavyzdžiui [2]). Pagrindinė šios diskusijos išvada viena: kol kas nėra argumentų, kurie neabejotinai pagrįstų platonizmą, arba neabejotinai jį paneigtų.

Mokslinėje literatūroje galima rasti ir kitokio pobūdžio reakcijų į platonizmo hipotezę. Pavyzdžiui, *Lakoff*o ir *Núnez*o knygoje „Iš kur atsiranda matematika" apie platonizmo, autorių vadinamo „matematikos romantika", pasekmes taip rašoma ([9], 341 pusl.): „Matematikos romantika nėra ta istorija, kuri turi tik teigiamas pasekmes. Ji gąsdina žmones." „Matematikos romantika tarnauja matematikų bendruomenei. Ji padeda palaikyti ir pateisinti elitizmą." „Matematikos romantika nėra nekaltas mitas - bent jau netiesiogiai jis prisideda prie visuomenės socialinio ir ekonominio padalinimo."

Platonizmo ir anti-platonizmo dilemos aktualumas paskutiniais dešimtmečiais matematikos filosofijoje rodo, jog filosofija lyg ir perleidžia matematikų kompetencijai vieną iš pagrindinių savo sričių - ontologiją. Visiškai atvirai tai tvirtina ir bando pagrįsti prancūzų filosofas A. *Badiou* ([1]). Jis tiesiog teigia, kad matematika yra ontologija.

Pabaigai Klausimą „kas yra matematika?" trumpai apžvelgėme tik vienu aspektu mokslo filosofijos svarstymų kontekste. Tačiau šis klausimas skirtingai interpretuojamas ir tuo labiau skirtingai atsakomas ir kituose kontekstuose. Tokiais kontekstais yra metamatematika, istorinė idėjų analizė, kognityviniai mokslai, psichologija ir kita. Daugelis matematikos prigimties aspektų aptariama neseniai pasirodžiusiame rinkinyje [7]. Požiūrių įvairovė šiuo klausimu primena senas diskusijas apie tai „kas yra žmogus?", „kas yra protas?", ar „kas yra kalba?". Šie ir kiti panašūs klausimai iš filosofijos kompetencijos perėjo į naujų mokslo krypčių sprendžiamų problemų kompetenciją. Cituojant minėto rinkinio [9] redaktorių R. *Hersh*ą, galima viltis, kad klausimas „kas yra matematika?" neilgai trukus taps kurios nors naujos mokslo srities problema. Tokiu atveju matematika taptų, jei ne mokslu, tai bent jau mokslo objektu.

Pastabos

(1) Anglų kalboje žodis „science" paprastai siejamas su gamtos mokslais. Rusų kalboje žodis „nauka" siejamas ir su literatūra, ir su suvirinimu, ir su mezgimu ir pan. Tuo tarpu mūsų kalboje, kartu su įprastinėmis „mokslas" reikšmėmis, Lietuvių kalbos žodynas nurodo taip pat reikšmes: svarbieji religijos teiginiai, pamokslas ir panašiai.

(2) 2006 metais Routledge leidyklos išleista enciklopedia “The Philosophy of Science" (redaguota S. Sarkar ir J. Pfeifer) neturi straipsnio skirto matematikai

ar logikai. Tačiau turi atskirus straipsnius skirtus įvairiems gamtos ir visuomenės mokslams, bei tikimybėms ir statistikai.

(3) Anglų kalbos žodį „pattern" verčiau „tvarka". Tokio vertimo nemačiau nei viename anglų-lietuvių kalbos žodyne. Mano pasirinkimą nulėmė konteksto žodžiui suteikiama reikšmė. Tokia žodžio „pattern" reikšmė taip apibrėžiama The Oxford English Dictionary vol. XI (2nd ed., Clarendon Press, 1989, p. 357 8c figuratively): an arrangement or order of things or activity in abstract senses; order or form discernible in things, actions, ideas, situations, etc. Panašiai apibūdinamą „pattern" reikšmę galima rasti ir kituose anglų kalbos žodynuose. Beveik tokią pačią reikšmę, greta kitų reikšmių, turi ir žodis „tvarka": išdėstymo, išsidėstymo būdas, sistema (Lietuvių kalbos žodynas: tvarka(1) 3).

(4) Šiam tikslui geriausiai tiktų S. *Mac Lane* knyga "Mathematics Form and Function" (Springer, 1986), kuri skirta matematikos prasmei ir turiniui apibūdinti. Šios knygos įvade autorius rašo: "[A] philosophy of mathematics is not convincing unless it is founded on an examination of Mathematics itself. Wittgenstein (and other philosophers) have failed in this regard."

(5) Kokia prasme matematika yra menas labai taikliai parodo P. *Lockhart*as savo straipsnyje „A Mathematician's Lament", skirtame matematikos mokymo vidurinėje mokykloje problemoms (žr. svetainės http://www.matematika.lt skyrelį straipsniai).

(6) Neretai sakoma (cituojant *Reuben*ą *Hersh*ą), kad darbo dienomis matematikas elgiasi taip, lyg matematikos objektai egzistuotų savaime, o matematikos teiginiai būtų absoliučiai teisingi. Visai kitokio požiūrio matematikas laikosi tais atvejais, kai bando paaiškinti apie savo darbą žmogui iš šalies. Tokiais atvejais jis neretai sako, jog matematikos teiginiai neturi jokios savarankiškos prasmės ir yra tik simbolių logikos rezultatai.

Literatūra

[1] A. Badiou, *Being And Event*. Continuum, 2005.

[2] M. Balaguer, *Planonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford University Press, 1998.

[3] P.J. Cohen, Skolem and pessimism about proof in mathematics. *Phil. Trans. R. Soc. A* (2005) 363, 2407-2418.

[4] M. Dummett, What is mathematics About? Rinkinyje: *Mathematics and Mind*, (ed. A. George), Oxford University Press, 1994.

[5] G. Frege, *The Foundations of Arithmetics. A logico-mathematical enquiry into the concept of number*. Engl. Translation by J.L.Austin. Northwestwern University Press, 1980.

[6] M. Hale, *Essentials of Mathematics. Introduction to Theory, Proof, and the Professional Culture*. The Mathematical Association of America, 2003.

[7] R. Hersh (editor), *18 unconventional essays on the nature of mathematics*. Springer, 2006.

[8] D. Keith, *Mathematics: The Science of Patterns. The Search for Order in Life, Mind, and the Universe*. Scientific American Library, 1994.

[9] G. Lakoff and R.E. Núnez, *Where Mathematics Comes From. How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. Basic Books, 2000.

[10] H. Poincaré, *Science et Methodie*. Flammarion, Paris, 1908.

[11] M. Steiner, *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*. Harvard University Press, 1998.

[12] M. Tiles, *Mathematics and the Image of Reason*. Routledge, 1991.

[13] E. Wigner, The unreasonable effectivness of mathematics in the natural sciences. *Comm. In Pure Appl. Math.*, 1960.